Exercice 25-1

On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos x$.
Soit (u_n) la suite réelle donnée par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0,1]$.

2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n).

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

4. *Première méthode*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$. On pose également $g = f \circ f$.

- ***a.*** Vérifier que α est l'unique point fixe de g et donner le sens de variation de g sur $[0,1]$.
- ***b.*** Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont monotones, de monotonies opposées et qu'elles convergent vers α.
- ***c.*** Conclure sur la convergence de la suite (u_n).
- ***d.*** Écrire une suite d'instructions en Maple qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

5. *Seconde méthode*

- ***a.*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant (\sin 1)^n$.
Retrouver ainsi le fait que la suite (u_n) converge vers α.
- ***b.*** En déduire une suite d'instructions en Maple qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Exercice 25-2

Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

2. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que (u_n) converge vers 1.

Exercice 25-3

Donner les développements limités suivants.

- $DL_3(0)$ de $f_1(x) = (\cos x)\sqrt{1+x}$
- $DL_4(0)$ de $f_2(x) = \ln(1+x)\sqrt{1+x}$
- $DL_3(0)$ de $f_3(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{1-x}$
- $DL_4(0)$ de $f_4(x) = e^{\cos x}$
- $DL_3(0)$ de $f_5(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$
- $DL_4(0)$ de $f_6(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

Exercice 25-4

Donner les développements limités suivants.

- $DL_4\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $f_1(x) = \cos x$
- $DL_4(1)$ de $f_2(x) = e^x$
- $DL_4(2)$ de $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$
- $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $f_4(x) = \tan x$
- $DL_4(e)$ de $f_5(x) = \ln x$
- $DL_4(1)$ de $f_6(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Exercice 25-5

Calculer les limites suivantes.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{1 - e^{2x}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(\tan x - \sin x)}{x^3}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \tan^2 x}{x - \sin x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \tan 2x}{x(1 - \cos 3x)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}\right)$