

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
CÁLCULO II

Docente: Luis Jaime Salazar Ramírez

Habilitación

junio de 2011

Ejercicio 1. Determine el valor de la integral $\int_1^2 \frac{dx}{(2-x)(x+1)}$

Solución:

La integral se soluciona por fracciones parciales de la siguiente forma:

Primero determinamos las fracciones parciales $\frac{1}{(2-x)(x+1)} = \frac{A_1}{2-x} + \frac{A_2}{x+1}$ pasando el denominador de la izquierda a multiplicar toma la forma $1 = A_1(x+1) + A_2(2-x)$ si $x = -1$ entonces $1 = A_1(-1+1) + A_2(2-(-1))$ lo que nos da que $A_2 = -\frac{1}{3}$ y por otro lado si $x = 2$ se tiene que $1 = A_1(2+1) + A_2(2-2)$ de donde $A_1 = \frac{1}{3}$. Así la integral original se puede reescribir como $\int_1^2 \frac{dx}{(2-x)(x+1)} = \int_1^2 \frac{1/3}{2-x} dx + \int_1^2 \frac{-1/3}{x+1} = \frac{1}{3} \left[\int_1^2 \frac{1}{2-x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} \right]$ lo que nos da $= \frac{1}{3} [-\ln|2-x| - \ln|x+1|]_1^2$, se ve que hay problema para evaluar 2 en el primer logaritmo natural puesto que no es posible evaluarlo directamente, así reescribimos $= \frac{1}{3} (-\lim_{b \rightarrow 2^-} \ln|2-x|_1^b - [\ln|x+1|]_1^2)$, lo que nos lleva a $= \frac{1}{3} [-\lim_{b \rightarrow 2^-} \ln|2-b| + \ln 1 - \ln(3) + \ln(1)]$ (Nótese que es $x \rightarrow 2^-$ puesto que $1 \leq x \leq 2$), el límite va para $-\infty$ puesto que nos estamos acercando a cero por derecha así toda la expresión es $+\infty$, es decir esta área no tiene medida finita.

Ejercicio 2. Halle el área entre las curvas $y = 3x + 2$ e $y = x^2 + 4$

Solución:

Para determinar los puntos de corte se requiere tanto hacer la gráfica como confirmar la información por método analítico. Veamos la figura 1:

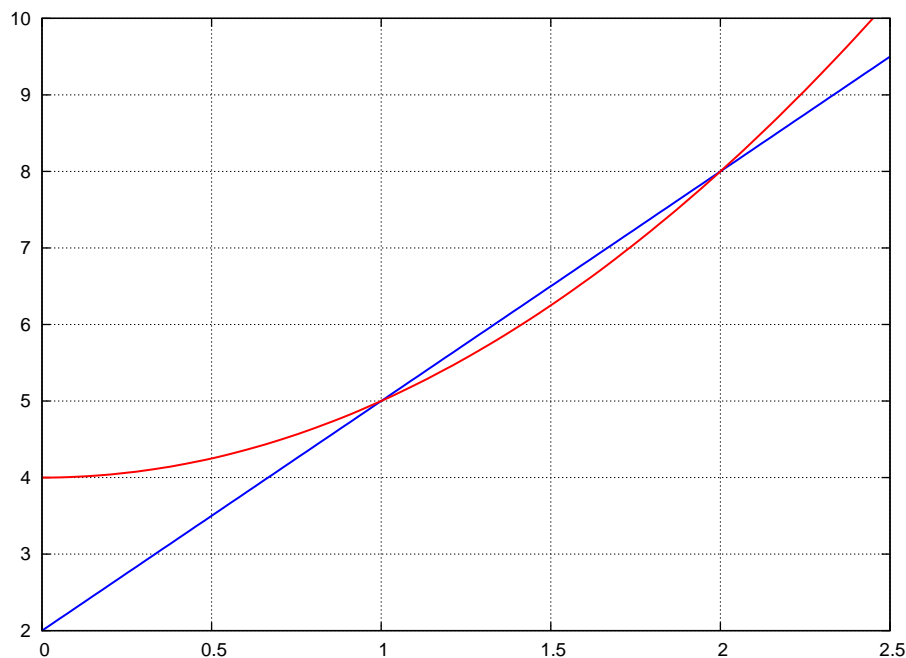


Figura 1.

De la figura se puede ver que los puntos de corte están en $x = 1$ y $x = 2$, lo que se puede confirmar por método analítico: para ambas funciones cuando se cortan sus valores de y deben ser iguales por tanto igualamos las dos funciones $3x + 2 = x^2 + 4$ que reorde-

nando queda $x^2 - 3x + 4 - 2 = 0$, es decir $x^2 - 3x + 2 = 0$, cuadrática que se puede factorizar como $(x - 1)(x - 2) = 0$ de donde dos números son iguales a cero si uno o ambos son cero, es decir, $x - 1 = 0 \vee x - 2 = 0$ lo que nos resulta en $x = 1$ y $x = 2$.

El área queda entonces $A = \int_1^2 (3x + 2 - x^2 - 4)dx$, véase que la función que está por encima en este intervalo es la línea recta, $A = \int_1^2 (-2 + 3x - x^2)dx = -2x + 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_1^2$ lo que nos da $= -2(2) + 3\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - (-2(1) + 3\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}$, que es el valor del área entre las curvas.

Ejercicio 3. Determine el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar $x = y^2 + 1$ en torno al eje y para x entre cero y el punto de corte con el eje x .

Solución:

La gráfica es la figura 2:

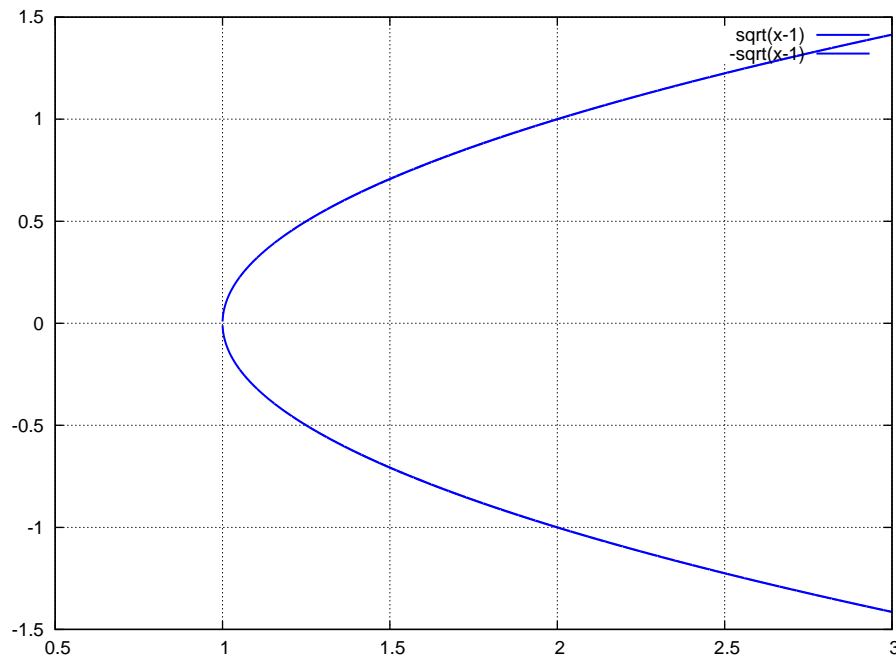


Figura 2.

De la gráfica se puede ver que la región de integración es $x \in [0, 1]$ pero en este intervalo no hay curva que integrar de modo que V no es posible calcularlo, puesto que cuando $x = 0$, y no tiene valor real y cuando $x = 1$, $y = 0$

Ejercicio 4. Halle el volumen del sólido generado por $y = \frac{1}{x^3}$ al rotar al rededor del eje y para $x \in [1, \infty)$

Solución:

hacemos la gráfica de la función y nos queda como en la figura 3:

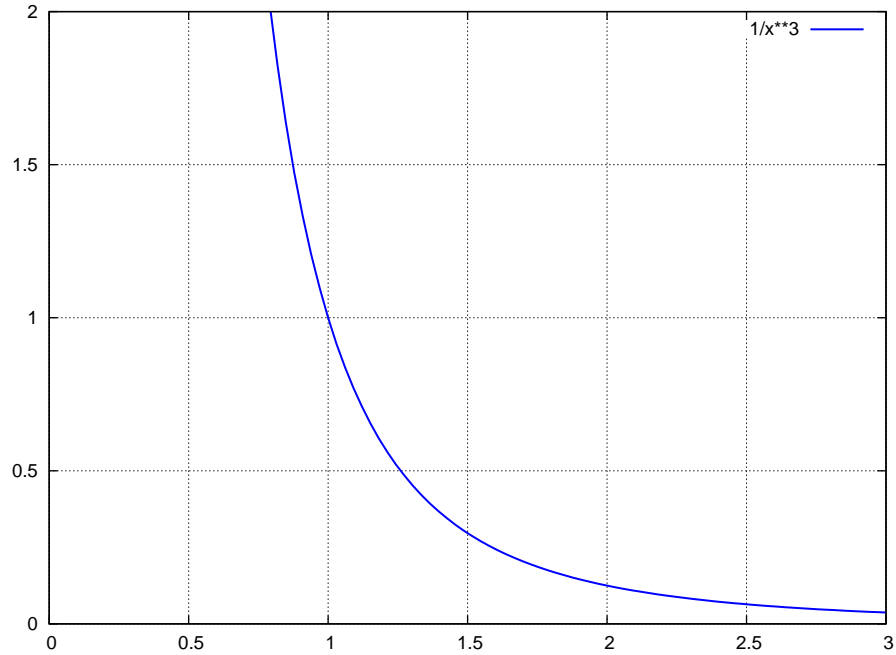


Figura 3.

Al ponerla a girar en torno a y queda el volumen, por el método de capas cilíndricas, como $V = 2\pi \int_1^\infty x \frac{1}{x^3} dx = 2\pi \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = 2\pi \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 2\pi \left[\lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{b} + 1 \right]$ pero cuando $b \rightarrow \infty$ el cociente $1/b \rightarrow 0$ de modo que el volumen es $V = 2\pi$