Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Espace vectoriel, sous-espace vectoriel

À partir de $\mathbb{K}^n$ et de quelques exemples, nous allons dégager une structure commune à chacun de ces ensembles.

1.1.1 Un exemple de référence : $\mathbb{K}^n$

On rappelle que

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, ..., x_n), x_i \in \mathbb{K}, i \in [\![1, n]\!]\},$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathbb{K}$ est appelé le corps des scalaires.

On munit $\mathbb{K}^n$ des opérations usuelles : l'addition et le produit par un scalaire

1.1.1.1 Une opération interne : l'addition

1.1.1.2 Une opération externe : le produit par un scalaire

1.1.2 Un autre regard sur quelques exemples connus

1.1.2.1 L'ensemble des applications numériques $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1.1.2.2 L'ensemble des suites numériques $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

1.1.2.3 L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1.1.2.4 L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$

1.1.2.5 L'ensemble des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{P})$

1.1.3 Définition d'espace vectoriel

1.1.4 Définition de sous-espace vectoriel

1.1.4.1 Définition

1.1.4.2 Sous-espace vectoriel et combinaisons linéaires

1.1.4.3 Exemples

1.1.5 Exercices

1.2 Familles de vecteurs

1.2.1 Famille libre de vecteurs

1.2.1.1 Définition et exemples

1.2.1.2 Propriétés des familles libres

1.2.1.3 Un exemple particulier : famille libre de $\mathbb{K}^n$

1.2.2 Famille génératrice de vecteurs

1.2.2.1 Définition et exemples

1.2.2.2 Propriétés des familles libres

1.2.2.3 Un exemple particulier : famille génératrice de $\mathbb{K}^n$

1.2.3 Exercices

1.3 Base et dimension d'un espace vectoriel

1.3.1 Base d'un espace vectoriel

1.3.1.1 Définition

1.3.1.2 Exemples

1.3.1.3 Comment montrer qu'une famille de vecteurs de E est une base de E

Exemple 1.1. Soit $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$ et $w = (-1, 1, 1)$. Montrons que la famille $\mathcal{F} =$

(u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha\, u + \beta\, v + \gamma\, w = (0, 0, 0).$$

1.3.2 Dimension d'un espace vectoriel

1.3.2.1 Définition

1.3.2.2 Propriétés

1.3.3 Exercices

Ici je mets du blah blah piour voir

1.4 Changement de base

1.4.1 Changement de base pour les vecteurs

Exemple 1.2. Soit $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$ et $w = (-1, 1, 1)$. La famille $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $a=(x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminons les coordonnées du vecteur a dans la base $\mathcal{B}=(u,v,w)$. On cherche donc $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que

$$a=(x,y,z)=\alpha\,u+\beta\,v+\gamma\,w,$$

c'est à dire tels que a ait pour coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$[a]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
[a]_{\mathcal{B}_0} &= [\alpha\,u+\beta\,v+\gamma\,w]_{\mathcal{B}_0}\\
&= \alpha\,[u]_{\mathcal{B}_0}+\beta\,[v]_{\mathcal{B}_0}+\gamma\,[w]_{\mathcal{B}_0}\\
&= \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Après calculs, on trouve

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

et

$$[a]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+y\\x+z\\y+z\end{pmatrix}.$$

Généralisons cet exemple.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

Définition 1.3. *On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, et l'on note $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Avertissement 1.4. On parle de matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ pour écrire la matrice des coordonnées de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ et non l'inverse, comme on serait tenté de le faire.

Proposition 1.5. *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible.*

Démonstration. Les colonnes de $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ forment une famille libre, car $\mathcal{B}'$ est une base de E. D'après le théorème ??, la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est donc inversible. □

Soit v un vecteur de E de coordonnées $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ et $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Quelle ralation existe-t-il entre $[v]_{\mathcal{B}}$ et $[v]_{\mathcal{B}'}$? Le théorème suivant, qui n'est qu'une réécriture de l'exemple précédent, répond à cette question.

Théorème 1.6. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Soit v un vecteur de E. Alors*

$$[v]_{\mathcal{B}} = P\,[v]_{\mathcal{B}'}.$$

De manière équivalente, on a

$$[v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[v]_{\mathcal{B}}.$$

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\mathcal{B}' = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)$. Soit $v \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$ et de coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans $\mathcal{B}'$:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{B}} &= [x'_1\,u'_1 + \cdots + x'_n\,u'_n]_{\mathcal{B}} \\ &= x'_1\,[u'_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + x'_n\,[u'_n]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Notons $(a_{1i}, \ldots, a_{ni})$ les coordonnées de u'_i dans la base $\mathcal{B}$ ($i \in [\![1, n]\!]$) :

$$[u'_i]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{B}} &= x'_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + x'_n \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.$$

Donc

$$[v]_{\mathcal{B}} = P\,[v]_{\mathcal{B}'},$$

soit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

De manière équivalente, P étant inversible, on a

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

□

Avertissement 1.7. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ permet donc de « passer » des coordonnées d'un vecteur dans $\mathcal{B}'$ à ses coordonnées dans $\mathcal{B}$: attention, le nom matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ peut être trompeur.

Théorème 1.8. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E.*

1. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = I_n$
2. $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1}$
3. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}$

Démonstration. TO DO □

Exercice 1.1. Soit $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X+X^2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P(X) = a\,X^2 + b\,X + c$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

Solution :

1. Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que
$$\alpha + \beta\,(1+X) + \gamma\,(1+X+X^2) = 0.$$
Par identification, on a
$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \beta+\gamma=0 \quad \text{et} \quad \gamma=0.$$
Donc $\alpha=\beta=\gamma=0$. $\mathcal{B}$ est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$. Or $\dim \mathbb{R}_2[X]=3$, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit
$$P_{B_0\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Notons $(x,\, y,\, z)$ les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$. On a
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$
Or
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Donc
$$P(X) = (a-b) + (b-c)\,(1+X) + c\,(1+X+X^2).$$

1.4.2 Changement de repère

1.5 Sommes et sommes directes d'espaces vectoriels

1.6 Rang(s)

1.6.1 Rang d'une matrice : approche théorique

insister sur la notion de dimension et faire lien avec nbre de pivots (approche algorithmlique) c'est bien le même rang.

1.6.2 Rang d'une famille de vecteurs