UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
CÁLCULO II
Docente: Luis Jaime Salazar Ramírez

Habilitación — junio de 2011

Ejercicio 1. Determine el valor de la integral $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)(x+1)}$

Solución:

La integral se soluciona por fracciones parciales de la siguiente forma:

$\frac{1}{(2-x)(x+1)} = \frac{A_1}{2-x} + \frac{A_2}{x+1}$ pasando el denominador de la izquierda a multiplicar toma la forma $1 = A_1(x+1) + A_2(2-x)$ si $x = -1$ entonces $1 = A_1(-1+1) + A_2(2-(-1))$ lo que nos da que $A_2 = -\frac{1}{3}$ y por otro lado si $x = 2$ se tiene que $1 = A_1(2+1) + A_2(2-2)$ de donde $A_1 = \frac{1}{3}$. Así la integral original se puede reescribir como $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)(x+1)} = \int_1^2 \frac{1/3}{2-x}\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{-1/3}{x+1} = \frac{1}{3}\left[\int_1^2 \frac{1}{2-x}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x+1}\right]$ lo que nos da $= \frac{1}{3}[-\ln|2-x| - \ln|x+1|]_1^2$, se ve que hay problema para evaluar 2 en el primer logaritmo natural puesto que no es posible evaluarlo directamente, así reescribimos $= \frac{1}{3}(-\lim_{b\to 2^-} \ln|2-x||_1^b - [\ln|x+1||]_1^2)$, lo que nos lleva a $= \frac{1}{3}[-\lim_{b\to 2^-} \ln|2-b| + \ln 1 - \ln(3) + \ln(1)]$ (Nótese que es $x \to 2^-$ puesto que $1 \leq x \leq 2$), el límite va para $-\infty$ puesto que nos estamos acercando a cero por derecha así toda la expresión es $+\infty$, es decir esta área no tiene medida finita.

Ejercicio 2. Halle el área entre las curvas $y = 3x + 2$ e $y = x^2 + 4$

Solución:

Para determinar los puntos de corte se requiere tanto hacer la gráfica como confirmar la información por método analítico. Veamos la figura 1:

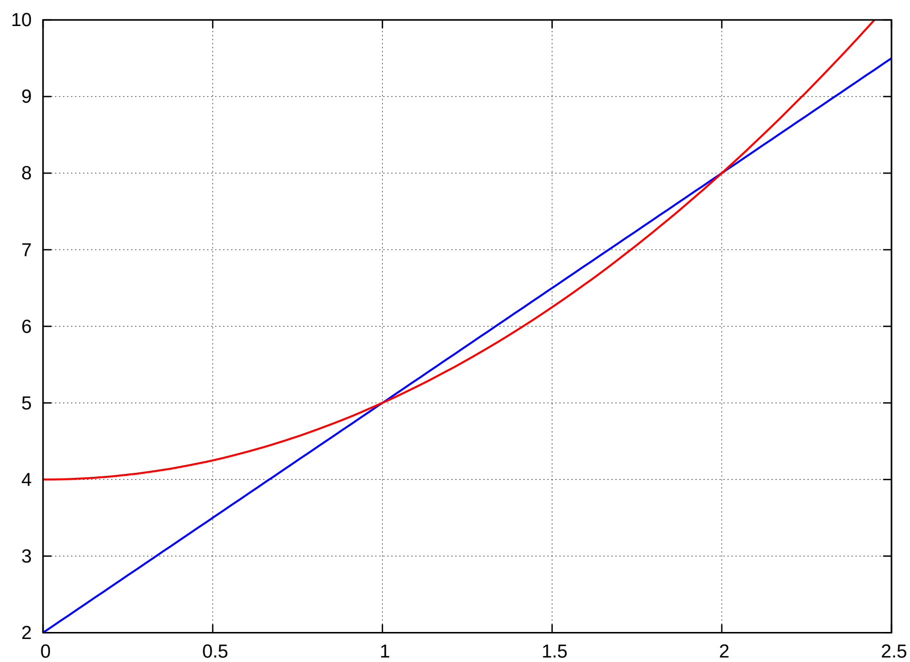

Figura 1.

De la figura se puede ver que los puntos de corte están en $x = 1$ y $x = 2$, lo que se puede confirmar por método analítico: para ambas funciones cuando se cortan sus valores de y deben ser iguales por tanto igualamos las dos funciones $3x + 2 = x^2 + 4$ que reordenando queda $x^2 - 3x + 4 - 2 = 0$, es decir $x^2 - 3\,x + 2 = 0$, cuadrática que se puede factorizar como $(x-1)(x-2)=0$ de donde dos números son iguales a cero si uno o ambos son cero, es decir, $x-1=0 \vee x-2=0$ lo que nos resulta en $x=1$ y $x=2$.

El área queda entonces $A=\int_1^2 (3x+2-x^2-4)\mathrm{d}x$, véase que la función que está por encima en este intervalo es la línea recta, $A=\int_1^2 (-2+3x-x^2)\mathrm{d}x = -2x+3\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_1^2$ lo que nos da $=-2(2)+3\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}-(-2(1)+3\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=\frac{1}{6}$, que es el valor del área entre las curvas.

Ejercicio 3. Determine el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar $x=y^2+1$ en torno al eje y para x entre cero y el punto de corte con el eje x.

Solución:

La gráfica es la figura 2:

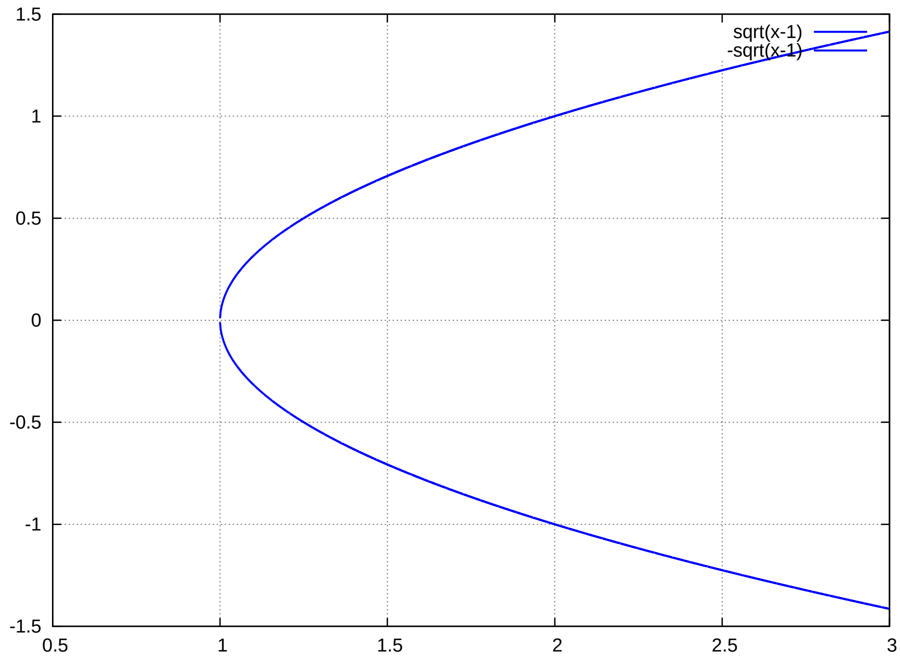

Figura 2.

De la gráfica se puede ver que la región de integración es $x \in [0, 1]$ pero en este intervalo no hay curva que integrar de modo que V no es posible calcularlo, puesto que cuando $x=0$ y no tiene valor real y cuando $x=1$, $y=0$

Ejercicio 4. Halle el volumen del sólido generado por $y=\frac{1}{x^3}$ al rotar al rededor del eje y para $x \in [1, \infty)$

Solución:

hacemos la gráfica de la función y nos queda como en la figura 3:

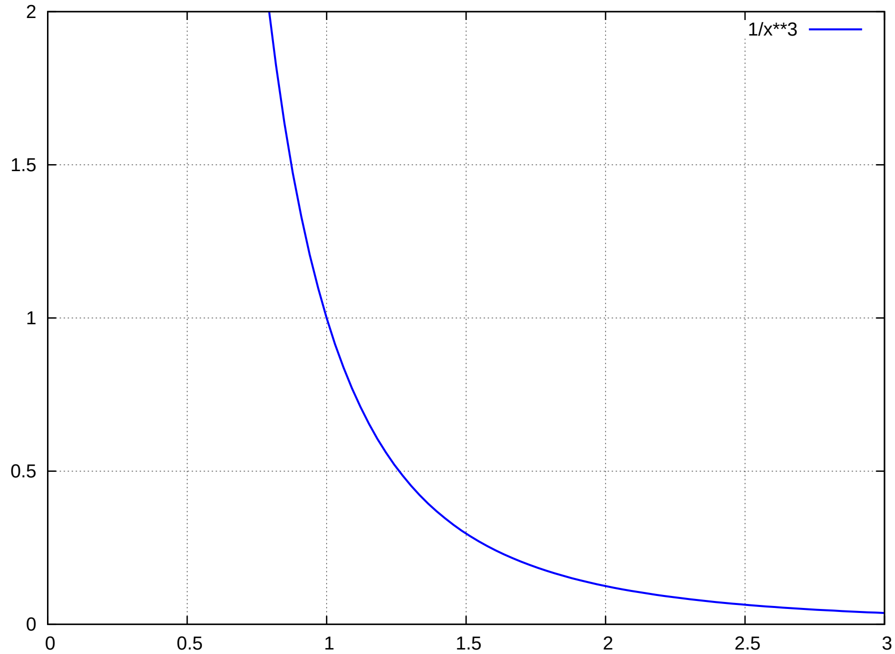

Figura 3.

Al ponerla a girar en torno a y queda el volumen, por el método de capas cilíndricas, como $V = 2\,\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \mathrm{d}x = 2\,\pi \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^3} \mathrm{d}x = 2\,\pi \lim_{b\to\infty} - \frac{1}{2\,x^2}\Big]_1^b = 2\,\pi\Big[\lim_{b\to\infty} - \frac{1}{2\,b^2} + \frac{1}{2}\Big]$ pero cuando $b \to \infty$ el cociente $\frac{1}{2\,b^2} \to 0$ de modo que el volumen es $V = 2\pi(\frac{1}{2}) = \pi$