1. (1'25 p) Dada una pirámide P, de altura 12 y base cuadrada de área 7, representarla gráficamente y calcular su volumen mediante integración.

Solución. Sean $a = 12$, $b = 7$. Por la simetría de la pirámide consideramos únicamente la cuarta parte mostrada en la figura:

Ecuación del plano inclinado:

$$z = a + \frac{-a}{\sqrt{b}/2}\, x = \frac{a}{\sqrt{b}}\,(\sqrt{b} - 2\,x)$$

$$\frac{1}{4}\,P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{b}/2,$$
$$-x \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant z \leqslant a\,(\sqrt{b} - 2\,x)/\sqrt{b}\}$$

$$\mathrm{vol}(P) =$$
$$= 4 \int_0^{\sqrt{b}/2} \int_{-x}^{x} \int_0^{a(\sqrt{b}-2x)/\sqrt{b}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

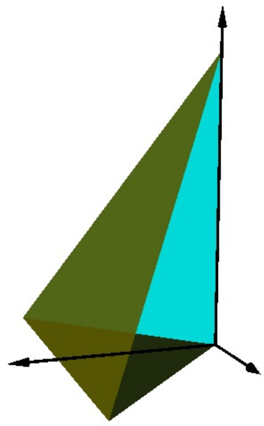

Figura 1. Pirámide P: parte simétrica.

$$= \frac{4\,a}{\sqrt{b}} \int_0^{\sqrt{b}/2} \int_{-x}^{x} (\sqrt{b} - 2\,x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{8\,a}{\sqrt{b}} \int_0^{\sqrt{b}/2} x\,(\sqrt{b} - 2\,x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= 8\,a \left[\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{2}{3\,\sqrt{b}}\,x^3\right]_0^{\sqrt{b}/2} = 8\,a \left(\frac{b}{8} - \frac{2\,b}{8 \cdot 3}\right) = \frac{a\,b}{3} = 28$$