Disciplina: Lógica e Conjuntos
Professor: Anderson Brasil
Período: 1/2020

1 Tópicos selecionados sobre conjuntos

Exercício 1. Seja $A = \{1, \{2\}, 3, \{4\}, \{5, 6, 7\}, 7\}$. Determine o que é verdadeiro e o que é falso:

a) $1 \in A$;
b) $2 \in A$;
c) $\{2\} \in A$;
d) $4 \notin A$;
e) $\{5, 6\} \subseteq A$;
f) $\{7\} \subseteq A$;
g) $\{1, 3\} \subseteq A$;
h) $\{\{2\}, \{4\}\} \subseteq A$;

Exercício 2. Escrever simbolicamente, de pelo menos duas formas distintas, cada um dos conjuntos:
a) conjunto dos números primos positivos, menores que 43;
b) conjunto dos números pares compreendidos entre 27 e 30;
c) conjunto dos números reais cuja quarta potência é 4;
d) conjunto dos números pares[1];
e) conjunto das raízes reais de $x^2 = 9$;
f) conjunto das raízes reais de $x^2 = -1$;

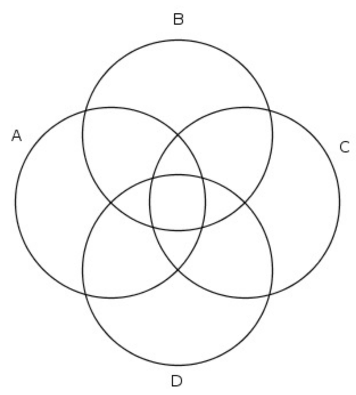
Exercício 3. Identificar como falso ou verdadeiro:
a) $\{1, 4, 9, 16, 25, ...\} = \{x \in \mathbb{N}; \exists n \in \mathbb{N}^* \,|\, x = n^2\}$;
b) $\{3, 7, 11, 15\} = \{x \in \mathbb{Z}; x \geqslant 3 \text{ e } x \leqslant 15 \text{ e } \frac{x-3}{4} \in \mathbb{Z}\}$;
c) $\{2, 4, 6, 8, 10, ...\} = \{n \in \mathbb{Z}; \exists k \in \mathbb{Z} \text{ com } n = 2k\}$;
d) $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R}; \exists p, q \in \mathbb{N}^* | x = \frac{p}{q}\right\}$;

Exercício 4. Determinar todos os conjuntos:
a) $\{x \in \mathbb{R}; x \neq x\}$;
b) $\{x \in \mathbb{R}; x = x\}$;
c) $\{x \in \mathbb{Q}; |x| = x\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}_+ | x = y^2\}$;
e) $\{x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} \text{ com } x = y^2\}$;
f) $\{x \in \mathbb{R}_-; \exists y \in \mathbb{R} \text{ com } x = y^2\}$;
g) $\left\{x \in \mathbb{R}; \exists p, q \in \mathbb{Z}^* | x = \frac{p}{q}\right\}$;

Exercício 5. Se $A = \{n \in \mathbb{N}; \exists x \in \mathbb{N} | n = 4x\}$ e $B = \mathbb{R}_+$ identifique que elementos pertencem à $A \times B$:
a) $(8, -\sqrt{2})$;
b) $\left(3, \frac{1}{2}\right)$;
c) $(-4, 17)$;
d) $(16, 19)$;
e) $(1, 0)$;
f) $(1000, -1)$;

Exercício 6. Desenhe o diagrama de Venn de três conjuntos A, B, C no conjunto universo e marque $A \cap B$, $A \cup C$, B^c, $C - B$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exercício 7. O objetivo deste exemplo é ilustrar que diagramas de Venn não funcionam bem quando se trabalha com quatro ou mais conjuntos . Observe a figura abaixo que, aparentemente, parece ser um diagrama de Venn perfeitamente válido para os conjuntos A, B, C e D. Mas aonde está o conjunto $(A \cap D) - (B \cup C)$?



1. Não esqueça de incluir na lista os números pares negativos e o zero.

Exercício 8. Se $A=\{x\in\mathbb{R}|0\leqslant x\leqslant 4\}$ e $B=\{x\in\mathbb{R}|1\leqslant x<3\}$ determine graficamente o conjunto $A-B$ e seguida descreva-o a partir de uma propriedade.

Exercício 9. Seja $A=\{x\in\mathbb{R};x^2\geqslant 1\}$, $B=\{x\in\mathbb{R};\exists m\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N}^*|x=\frac{m}{n}\}$, $C=\{x\in\mathbb{R};\exists q\in\mathbb{Q}|x^3=q\}$ e $D=\left\{\sqrt[3]{\frac{17}{3}},-\frac{1}{8},27,-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right\}$. Determine:

a) $A\cap D$;

b) $B\cap D$;

c) $C\cap D$.

Exercício 10. Sejam $A=\{x\in\mathbb{Q}|x^2\leqslant 3\}$, $B=\left\{-3,\sqrt[2]{\frac{1}{2}},1,2,\sqrt[2]{3},-1\right\}$ e $C=\{x\in\mathbb{Q};\exists y\in\mathbb{R}|x=y^2\}$ e $D=\left\{\sqrt{3},\frac{9}{5},-\frac{1}{4},\frac{4}{7},\frac{50}{6},\frac{16}{3}\right\}$ e $E=\left\{y\in\mathbb{R};\exists p,q\in\mathbb{N}^*|y=\frac{p^2}{q}\right\}$. Determine:

a) $A\cap B$;

b) $A\cap C$;

c) $B\cap C$;

d) $D\cap E$;

e) $C\cap E$;

f) $B\cap E$;

Exercício 11. Sejam $A=\left\{\frac{1}{2},\ \sqrt[4]{\frac{1}{2}},\ \{0,\ \{1\}\},\ \left\{2,\ 4\right\},\ 8\right\}$, $B=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ \{2,\ 4\},\ \{8\}\right\}$, $C=\left\{x\in\mathbb{R};\ \exists y\in\mathbb{Q}|x^2=y\right\}$ e $D=\{x\in\mathbb{R};3x^4>1\}$. Determine:

a) $A\cap B$;

b) $A\cap C$;

c) $A\cap D$;

Exercício 12. É comum se utilizar a notação $\{f(\lambda),\ \lambda\in\Lambda\}$ para designar $\{x;\ \exists\lambda\in\Lambda|f(\lambda)=x\}$ (considerando-se o conjunto universo subentendido pela situação e que, neste curso, geralmente será $\mathbb{R}$). Por exemplo, o conjunto dos inteiros pares pode ser denotado por $\{2n,n\in\mathbb{Z}\}$. Se $A=\left\{\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}^*\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{n^2},n\in\mathbb{Q}^*\right\}$, $C=\{9x^2+27x-5,x\in\mathbb{Q}\}$ e seja ainda $D=\left\{\frac{1}{7},\sqrt{2},\frac{1}{9},\frac{1}{2},17,-4\right\}$. Achar

a) $A\cap D$;

b) $B\cap D$;

c) $C\cap D$;

d) $A\cap B$.

Soluções: 1) a)V; b) F; c) V; d) V; e) F; f) V; g) V; h) V; 3) a)V; b) V; c) F; d) F; 4) a) $\varnothing$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{Q}_+$; d) $\mathbb{R}_+$; e) $\mathbb{R}_+$; f) $\{0\}$; g) $\mathbb{Q}^*$; 5) Somente d; 8) $\{x\in\mathbb{R};\ 0\leqslant x<1$ ou $3\leqslant x\leqslant 4\}$; 9) a) $\left\{\sqrt[3]{\frac{17}{3}},\ 27\right\}$; b) $\{27\}$; c) $\left\{\sqrt[3]{\frac{17}{3}},-\frac{1}{8},27,-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right\}$; 10) a) $\{-1,1\}$; b) $\{x\in\mathbb{Q}_+;x^2\leqslant 3\}$; c) $\{1,2\}$; d) $\left\{\frac{9}{5},\frac{4}{7},\frac{50}{6},\frac{16}{3}\right\}$; e) E; f) $\{1,2\}$; 11) a) $\left\{\frac{1}{2},\left\{2,4\right\}\right\}$; b) $\left\{\frac{1}{2},8\right\}$; c) $\left\{\sqrt[4]{\frac{1}{2}},8\right\}$; 12) a) $\left\{\frac{1}{7},\frac{1}{9},\frac{1}{2}\right\}$; b) $\left\{\frac{1}{9}\right\}$; c) $\{17\}$; d) B.